Terzo esercizio esame 11/06:

i)
$\varphi(t) = |t|^p$ è convessa:

$$\varphi(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$$

Ponendo $a = f$ e $b = -g$ si ha la disuguaglianza richiesta.

ii)
per il punto precedente, ponendo $g = f_n$ si ha

$$0 \leq \frac{|f|^p + |f_n|^p}{2} - |\frac{f - f_n}{2}|^p$$

$$g_n := \frac{|f|^p + |f_n|^p}{2} - |\frac{f - f_n}{2}|^p$$

$$\int \liminf(g_n) \leq \liminf \int (g_n)$$

$$\int \liminf(\frac{|f|^p + |f_n|^p}{2} - |\frac{f - f_n}{2}|^p) \leq \liminf \int (\frac{|f|^p + |f_n|^p}{2} - |\frac{f - f_n}{2}|^p)$$

vale: $\liminf(-a) = -\limsup(a)$

$$||f||_p^p + 0 \leq ||f||_p^p - \limsup(\int |\frac{f_n - f}{2}|^p)$$

$$\limsup(\int |\frac{f_n - f}{2}|^p) \leq 0$$

$$||\frac{f_n - f}{2}||_p^p \to 0$$